3

Παράγωγοι υψηλότερης τάξης: σημεία μεγίστου και ελαχίστου

Leonhard Euler (του Emanuel Handman) (1707–1783).

Ό,τι είναι περιττό δυσαρεστεί τον Θεό και τη Φύση.
Ό,τι δυσαρεστεί τον Θεό και τη Φύση είναι κακό. —Dante Alighieri, γύρω στο 1300

... συγκεκριμένα, επειδή το σχήμα ολόκληρου του σύμπαντος είναι το τελειότερο, και, μάλιστα, σχεδιασμένο από τον πάνσοφο δημιουργό, δεν μπορεί να συμβεί τίποτα σε όλο τον κόσμο χωρίς να λάμπει από κάπου κάποιος κανόνας μεγίστου ή ελαχίστου. —Leonhard Euler

Στον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, για να βρούμε τα τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα μιας συνάρτησης $f(x)$, συνήθως χρησιμοποιούμε τη δεύτερη παράγωγο. Αναζητούμε τα κρίσιμα σημεία x_0 —δηλαδή τα σημεία x_0 όπου $f'(x_0) = 0$— και σε κάθε τέτοιο σημείο ελέγχουμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου $f''(x_0)$. Αν $f''(x_0) < 0$ το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f, αν $f''(x_0) > 0$ το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f, ενώ αν $f''(x_0) = 0$ ο έλεγχος αποτυγχάνει.

Σε αυτό το κεφάλαιο επεκτείνουμε αυτές τις μεθόδους στις πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Ξεκινάμε, στην Ενότητα 3.1, εξετάζοντας τις πολλαπλές και υψηλότερης τάξης μερικές παραγώγους. Στην Ενότητα 3.2 εξετάζουμε το θεώρημα του Taylor για τις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, το οποίο χρησιμοποιούμε στην Ενότητα 3.3 για να κατασκευάσουμε κριτήρια ελέγχου για σημεία μεγίστου, ελαχίστου και σαγματικά σημεία. Όπως συμβαίνει και με τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής, αυτές οι μέθοδοι μας βοηθούν να σχεδιάσουμε το γράφημα μιας συνάρτησης.

Στην Ενότητα 3.4 μελετάμε το πρόβλημα της μεγιστοποίησης μιας πραγματικής συνάρτησης υπό συμπληρωματικές συνθήκες, οι οποίες ονομάζονται και περιορισμοί. Για παράδειγμα, μπορεί να θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την $f(x, y, z)$ μεταξύ εκείνων των (x, y, z) που είναι περιορισμένα να ανήκουν στη μοναδιαία σφαίρα $x^2+y^2+z^2 = 1$. Στην Ενότητα 3.5 εξετάζουμε ένα τεχνικό θεώρημα (το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων) που είναι χρήσιμο στη μελέτη των περιορισμών. Θα μας φανεί χρήσιμο και αργότερα, στη μελέτη των επιφανειών.

3.1 Πολλαπλές μερικές παράγωγοι

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε σημαντικά αποτελέσματα σχετικά με την παράγωγο μιας απεικόνισης και διερευνήσαμε τις γεωμετρικές ιδιότητες των πραγματικών συναρτήσεων που σχετίζονται με την παράγωγο χρησιμοποιώντας την κλίση. Σε αυτή την ενότητα θα προχωρήσουμε στη μελέτη των παραγώγων υψηλότερης τάξης, με στόχο να αποδείξουμε την ισότητα των «μεικτών μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης» μιας συνάρτησης. Ξεκινάμε ορίζοντας τους απαραίτητους όρους.

Έστω $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση C^1. Υπενθυμίζουμε ότι αυτό σημαίνει ότι οι $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ και $\partial f/\partial z$ υπάρχουν και είναι συνεχείς. Αν αυτές οι παράγωγοι έχουν, με τη σειρά τους, συνεχείς μερικές παραγώγους, λέμε ότι f είναι ***κλάσης*** C^2 ή ότι είναι ***δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη***. Με αντίστοιχο τρόπο, όταν λέμε ότι η f είναι κλάσης C^3, εννοούμε ότι η f έχει συνεχείς πολλαπλές μερικές παραγώγους τρίτης τάξης, κ.ο.κ. Ακολουθούν μερικά παραδείγματα σχετικά με τον τρόπο γραφής των παραγώγων δεύτερης τάξης:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \text{κ.λπ.}$$

Αυτή η διαδικασία μπορεί, ασφαλώς, να επαναληφθεί για τις παραγώγους τρίτης τάξης, κ.ο.κ. Αν η f είναι συνάρτηση μόνο των x, y και οι $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες, τότε, παίρνοντας μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης, καταλήγουμε στις τέσσερις συναρτήσεις

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}.$$

Όλες καλούνται ***πολλαπλές μερικές παράγωγοι***, ενώ οι $\partial^2 f/\partial x\,\partial y$ και $\partial^2 f/\partial y\,\partial x$ καλούνται ***μεικτές μερικές παράγωγοι***.

Παράδειγμα 1 Βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της $f(x,y) = xy + (x+2y)^2$.

Λύση Οι πρώτες μερικές παράγωγοι είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2(x+2y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 4(x+2y).$$

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε καθεμία από αυτές τις εκφράσεις ως προς x και y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 5, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 5.$$

▲

Παράδειγμα 2 Βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της $f(x,y) = \sin x \sin^2 y$.

Λύση Εργαζόμαστε ακριβώς όπως στο Παράδειγμα 1:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \sin^2 y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2\sin x \sin y \cos y = \sin x \sin 2y\cdot$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - = -\sin x \sin^2 y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\sin x \cos 2y\cdot$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \cos x \sin 2y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 2\cos x \sin y \cos y = \cos x \sin 2y.$$

▲

Παράδειγμα 3 Έστω $f(x,y,z) = e^{xy} + z\cos x$. Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} - z\sin x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \cos x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} = -\sin x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} = -\sin x, \qquad \text{κ.λπ.}$$

▲

Οι μεικτές μερικές παράγωγοι είναι ίσες

Σε όλα αυτά τα παραδείγματα παρατηρούμε ότι οι μεικτές μερικές παράγωγοι ως προς τις ίδιες δύο μεταβλητές, όπως οι $\partial^2 f/\partial x\,\partial y$ και $\partial^2 f/\partial y\,\partial x$, ή οι $\partial^2 f/\partial z\,\partial x$ και $\partial^2 f/\partial x\,\partial z$, είναι ίσες μεταξύ τους. Αποτελεί θεμελιώδες αν και ενδεχομένως απρόσμενο γεγονός το ότι *αυτό ισχύει πάντα για τις συναρτήσεις κλάσης* C^2. Θα το αποδείξουμε στο θεώρημα που ακολουθεί για συναρτήσεις $f(x, y)$ δύο μεταβλητών, αλλά η απόδειξη μπορεί να επεκταθεί εύκολα για συναρτήσεις n μεταβλητών.

Θεώρημα 1 Ισότητα μεικτών μερικών παραγώγων Αν η $f(x, y)$ είναι κλάσης C^2 (δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη), τότε οι μεικτές μερικές παράγωγοι είναι ίσες, δηλαδή

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}.$$

Απόδειξη Θεωρούμε την ακόλουθη έκφραση (βλ. Σχήμα 3.1.1):

$$\begin{aligned} S(\Delta x, \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &- f(x_0 + \Delta x, y_0) \\ &- f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Κρατώντας σταθερά τα y_0 και Δy, ορίζουμε

$$g(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0),$$

οπότε $S(\Delta x, \Delta y) = g(x_0+\Delta x) - g(x_0)$, δηλαδή *η S εκφράζεται ως μια διαφορά διαφορών*. Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής για τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής, το $g(x_0+\Delta x) - g(x_0)$ ισούται με $g'(\bar{x})\Delta x$ για κάποιο $\bar{x}$ μεταξύ x_0 και $x_0 + \Delta x$. Επομένως,

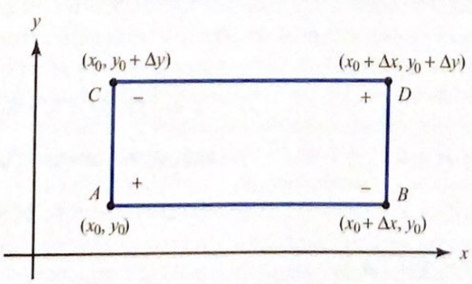
$$S(\Delta x, \Delta y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0)\right]\Delta x.$$

Και πάλι με βάση το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει ένα $\bar{y}$ μεταξύ y_0 και $y_0 + \Delta y$ τέτοιο ώστε

$$S(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(\bar{x}, \bar{y})\,\Delta x\,\Delta y.$$

Επειδή η $\partial^2 f/\partial y\,\partial x$ είναι συνεχής, έπεται ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{1}{\Delta x \Delta y}[S(\Delta x, \Delta y)].$$



Σχήμα 3.1.1 Η άλγεβρα πίσω από την ισότητα των μεικτών μερικών παραγώγων: η διαφορά διαφορών γραμμένη με δύο τρόπους.

Παρατηρώντας ότι η S είναι συμμετρική ως προς Δx και Δy, δείχνουμε με αντίστοιχο τρόπο ότι η $\partial^2 f/\partial x\,\partial y$ δίνεται από τον *ίδιο οριακό τύπο*, αποδεικνύοντας με αυτό τον τρόπο το ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

Ιστορικό σημείωμα

Η ισότητα των μεικτών μερικών παραγώγων είναι ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα του λογισμού των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Θα τη συναντήσουμε ξανά σε αρκετές περιπτώσεις στη συνέχεια του βιβλίου κατά τη μελέτη των διανυσματικών ταυτοτήτων.

Στο επόμενο ιστορικό σημείωμα θα αναφερθούμε στον ρόλο των μερικών παραγώγων στη διατύπωση πολλών από τις βασικές εξισώσεις που διέπουν τα φυσικά φαινόμενα. Ένας από τους θρύλους εκείνης της εποχής είναι ο Leonhard Euler (1707–1783), ο οποίος ανέπτυξε τις εξισώσεις της ρευστομηχανικής που φέρουν το όνομά του — τις εξισώσεις Euler. Για τις ανάγκες ανάπτυξης αυτών των εξισώσεων ανακάλυψε, γύρω στο 1734, την ισότητα των μεικτών μερικών παραγώγων. Ο Euler ήταν τότε περίπου 27 χρονών.

Στην Άσκηση 17 σας ζητείται να συναγάγετε από το Θεώρημα 1 ότι για μια συνάρτηση C^3 των x, y και z,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z\,\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial z\,\partial x}, \qquad \text{κ.λπ.}$$

Με άλλα λόγια, μπορούμε να υπολογίζουμε τις πολλαπλές μερικές παραγώγους με όποια σειρά θέλουμε.

Παράδειγμα 4 Επαληθεύστε την ισότητα των μεικτών μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης για τη συνάρτηση

$$f(x,y) = xe^y + yx^2.$$

Λύση Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + 2xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + x^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = e^y + 2x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = e^y + 2x,$$

άρα

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}.$$

▲

Μερικές φορές οι μερικές παράγωγοι συμβολίζονται με f_x, f_y, f_z: $f_x = \partial f/\partial x$, κ.ο.κ. Με αυτό τον συμβολισμό, $f_{xy} = (f_x)_y$, οπότε η ισότητα των μεικτών μερικών παραγώγων γράφεται ως $f_{xy} = f_{yx}$. Προσέξτε ότι $f_{xy} = \partial^2 f/\partial y\,\partial x$, άρα τα x και y γράφονται με αντίστροφη σειρά στους δύο συμβολισμούς. Ευτυχώς, η ισότητα των μεικτών μερικών παραγώγων αίρει αυτή τη δυνητική πηγή αμφισημίας. Στο παράδειγμα που ακολουθεί περιγράφεται η χρήση αυτού του συμβολισμού.

Παράδειγμα 5 Έστω

$$z = f(x,y) = e^x \sin xy$$

και $x = g(s,t)$, $y = h(s,t)$ για κάποιες συναρτήσεις g και h. Έστω

$$k(s,t) = f(g(s,t), h(s,t)).$$

Υπολογίστε την k_{st}.

Λύση Από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$k_s = f_x g_s + f_y h_s = (e^x \sin xy + ye^x \cos xy) g_s + (xe^x \cos xy) h_s.$$

Παραγωγίζοντας ως προς t μέσω των κανόνων του γινομένου παίρνουμε

$$k_{st} = (f_x)_t g_s + f_x (g_s)_t + (f_y)_t h_s + f_y (h_s)_t.$$

Εφαρμόζοντας ξανά τον κανόνα της αλυσίδας στις $(f_x)_t$ και $(f_y)_t$ παίρνουμε

$$(f_x)_t = f_{xx} g_t + f_{xy} h_t \quad \text{και} \quad (f_y)_t = f_{yx} g_t + f_{yy} h_t,$$

οπότε η k_{st} παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} k_{st} &= (f_{xx} g_t + f_{xy} h_t) g_s + f_x g_{st} + (f_{yx} g_t + f_{yy} h_t) h_s + f_y h_{st} \\ &= f_{xx} g_t g_s + f_{xy}(h_t g_s + h_s g_t) + f_{yy} h_t h_s + f_x g_{st} + f_y h_{st}. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι ο τελευταίος αυτός τύπος είναι συμμετρικός ως προς (s, t), οπότε η ισότητα $k_{st} = k_{ts}$ επαληθεύεται. Υπολογίζοντας τις f_{xx}, f_{xy} και f_{yy}, παίρνουμε

$$\begin{aligned} k_{st} = &\,(e^x \sin xy + 2ye^x \cos xy - y^2 e^x \sin xy) g_t g_s \\ &+ (xe^x \cos xy + e^x \cos xy - xye^x \sin xy)(h_t g_s + h_s g_t) \\ &- (x^2 e^x \sin xy) h_t h_s + (e^x \sin xy + ye^x \cos xy) g_{st} + (xe^x \cos xy) h_{st}, \end{aligned}$$

όπου εννοείται ότι $x = g(s, t)$ και $y = h(s, t)$. ▲

Ιστορικό σημείωμα

Κάποιες μερικές διαφορικές εξισώσεις

Η φιλοσοφία [φύση] είναι γραμμένη σε αυτό το σπουδαίο βιβλίο που βρίσκεται πάντα μπροστά στα μάτια μας —εννοώ το σύμπαν— αλλά δεν μπορούμε να το κατανοήσουμε αν δεν μάθουμε πρώτα τη γλώσσα και δεν καταλάβουμε τα σύμβολα με τα οποία είναι γραμμένο. Το βιβλίο είναι γραμμένο στη μαθηματική γλώσσα και τα σύμβολα είναι τα τρίγωνα, οι κύκλοι και τα άλλα γεωμετρικά σχήματα, χωρίς τη βοήθεια των οποίων είναι αδύνατο να κατανοήσουμε την παραμικρή του λέξη· χωρίς αυτά περιφερόμαστε μάταια μέσα σε έναν σκοτεινό λαβύρινθο.

—Γαλιλαίος

Αυτό το απόσπασμα καταδεικνύει την πίστη των αρχαίων Ελλήνων, η οποία διαδόθηκε και πάλι ευρέως την εποχή του Γαλιλαίου, ότι μεγάλο μέρος της φύσης μπορούσε να περιγραφεί μέσω των μαθηματικών. Στα τέλη του δέκατου έβδομου αιώνα αυτή η αντίληψη ενισχύθηκε δραστικά όταν ο Νεύτωνας, χρησιμοποιώντας τον νόμο της βαρύτητας που είχε ανακαλύψει, συνήγαγε τους τρεις νόμους της κίνησης των ουράνιων σωμάτων του Kepler (βλ. Ενότητα 4.1), εξήγησε τις παλίρροιες και έδειξε ότι η Γη ήταν πεπλατυσμένη στους πόλους. Η φιλοσοφία αυτή επηρέασε σημαντικά τα μαθηματικά και πολλοί μαθηματικοί προσπάθησαν να «μαθηματικοποιήσουν» τη φύση. Η σημερινή κυριαρχία των μαθηματικών στις φυσικές επιστήμες (και, σε αυξανόμενο βαθμό, στις οικονομικές και κοινωνικές επιστήμες και στη βιολογία) είναι απόδειξη της επιτυχίας αυτών των προσπαθειών. Με τη σειρά τους, οι προσπάθειες μαθηματικοποίησης της φύσης οδήγησαν πολλές φορές σε νέες μαθηματικές ανακαλύψεις.

Πολλοί από τους νόμους της φύσης περιγράφονται είτε μέσω συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ΣΔΕ), εξισώσεων που περιλαμβάνουν τις παραγώγους συναρτήσεων μίας μόνο μεταβλητής, όπως είναι οι νόμοι της κίνησης των πλανητών, είτε μέσω μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ), δηλαδή εξισώσεων που περιλαμβάνουν μερικές παραγώγους συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Για να σας βοηθήσουμε να αντιληφθείτε το ιστορικό πλαίσιο και να σας παροτρύνουμε να μελετήσετε τις μερικές παραγώγους, θα περιγράψουμε σύντομα τρεις από τις γνωστότερες μερικές διαφορικές εξισώσεις: την εξίσωση θερμότητας, την εξίσωση δυναμικού (ή εξίσωση Laplace) και την κυματική εξίσωση.

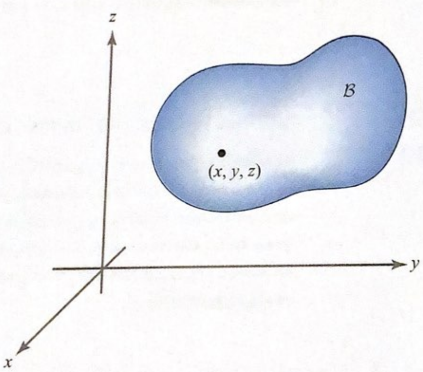
Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ. Στις αρχές του δέκατου ένατου αιώνα ο Γάλλος μαθηματικός Joseph Fourier (1768–1830) ασχολήθηκε με τη μελέτη της θερμότητας. Η ροή θερμότητας είχε προφανείς εφαρμογές τόσο σε βιομηχανικά όσο και σε επιστημονικά προβλήματα: Η καλύτερη κατανόησή της θα καθιστούσε, για παράδειγμα, δυνατή την αποδοτικότερη τήξη των μετάλλων και θα επέτρεπε στους επιστήμονες να προσδιορίσουν τη θερμοκρασία ενός σώματος δεδομένης της θερμοκρασίας στο σύνορό του, και να προσεγγίσουν τη θερμοκρασία του εσωτερικού της Γης.

Έστω ότι ένα ομογενές σώμα $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ (Σχήμα 3.1.2) αναπαριστάται ως ένα χωρίο του τριδιάστατου χώρου. Έστω $T(x, y, z, t)$ η θερμοκρασία του σώματος στο σημείο (x, y, z) τη χρονική στιγμή t. Ο Fourier, στηριζόμενος σε κάποιες φυσικές αρχές (που περιγράφονται στην Ενότητα 8.5), απέδειξε ότι η θερμοκρασία T πρέπει να ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{1}$$

που καλείται ***εξίσωση θερμότητας***, όπου k είναι μια σταθερά η τιμή της οποίας εξαρτάται από την αγωγιμότητα του υλικού από το οποίο είναι φτιαγμένο το σώμα. Χοντρικά, αυτή η εξίσωση περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο διαχέεται η θερμότητα από ένα σημείο με θερμοκρασία υψηλότερη από τη θερμοκρασία των γειτονικών του σημείων.

Ο Fourier χρησιμοποίησε αυτή την εξίσωση για να λύσει προβλήματα θερμικής αγωγιμότητας. Μάλιστα, διερευνώντας τις λύσεις της εξίσωσης (1), οδηγήθηκε στην ανακάλυψη της *σειράς Fourier*.



Σχήμα **3.1.2** Ένα ομογενές σώμα στον χώρο.

Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ. Ας θεωρήσουμε το βαρυτικό δυναμικό V (που συχνά καλείται δυναμικό του Νεύτωνα) μιας μάζας m σε ένα σημείο (x, y, z) που οφείλεται σε μια σημειακή μάζα M που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. [Σ.τ.Μ.: Ακριβέστερα, το V είναι η βαρυτική δυναμική ενέργεια.] Αυτό το δυναμικό δίνεται από την $V = -GmM/r$, όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Το δυναμικό V ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{2}$$

παντού εκτός από την αρχή των αξόνων, όπως θα διαπιστώσουμε στο επόμενο κεφάλαιο (βλ. επίσης Άσκηση 25). Αυτή η εξίσωση είναι γνωστή ως ***εξίσωση του Laplace***. Ο Pierre-Simon de Laplace (1749–1827) ασχολήθηκε με τη βαρυτική έλξη μη σημειακών μαζών και ήταν ο πρώτος που συσχέτισε την εξίσωση (2) με τη βαρυτική έλξη. Υποστήριξε (κάτι το οποίο αποδείχθηκε αργότερα εσφαλμένο) ότι η εξίσωση (2) ίσχυε για οποιοδήποτε σώμα και οποιοδήποτε σημείο είτε εντός είτε εκτός του σώματος. Ωστόσο, ο Laplace δεν ήταν ο πρώτος που έγραψε την εξίσωση (2). Η εξίσωση δυναμικού εμφανίστηκε για πρώτη φορά σε ένα από τα σημαντικότερα άρθρα του Euler το 1752, τις «Αρχές της κίνησης των ρευστών», όπου συνήγαγε την εξίσωση δυναμικού σε σχέση με την κίνηση των (ασυμπίεστων) ρευστών. Ο Euler σημείωσε ότι δεν είχε ιδέα πώς να λύσει την εξίσωση (2). Ο Poisson έδειξε αργότερα ότι αν το (x, y, z) βρίσκεται μέσα σε ένα έλκον σώμα, το V ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho. \tag{3}$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα μάζας του έλκοντος σώματος. Σήμερα, η εξίσωση (3) ονομάζεται ***εξίσωση του Poisson***. Ο Poisson ήταν επίσης ο πρώτος που επισήμανε τη σημασία αυτής της εξίσωσης για τα προβλήματα που αφορούν ηλεκτρικά πεδία. Προσέξτε ότι αν η θερμοκρασία T είναι σταθερή στον χρόνο, η εξίσωση θερμότητας (1) μετατρέπεται στην εξίσωση του Laplace (2).

Οι εξισώσεις του Laplace και του Poisson είναι θεμελιώδεις σε πολλά ακόμη πεδία πέραν της ρευστομηχανικής, των βαρυτικών πεδίων και των ηλεκτροστατικών πεδίων. Για παράδειγμα, είναι χρήσιμες για τη μελέτη των υμενίων σαπουνάδας και των υγρών κρυστάλλων (βλ. *The Parsimonious Universe: Shape and Form in the Natural World* των S. Hildebrandt και A. Tromba, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1995).

Η ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ. Η γραμμική κυματική εξίσωση στον χώρο έχει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \tag{4}$$

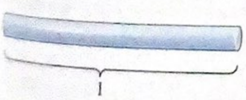
Τη μονοδιάστατη κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{4'}$$

συνήγαγε γύρω στο 1727 ο Johann II Bernoulli και, μερικά χρόνια αργότερα, ο Jean Le Rond d'Alembert μελετώντας τον τρόπο προσδιορισμού της κίνησης μιας παλλόμενης χορδής (όπως της χορδής ενός βιολιού). Η εξίσωση (4) είναι χρήσιμη για τη μελέτη των παλλόμενων σωμάτων και της ελαστικότητας. Όπως θα δούμε όταν θα εξετάσουμε τις εξισώσεις του Maxwell για τον ηλεκτρομαγνητισμό στην Ενότητα 8.5, η συγκεκριμένη εξίσωση εμφανίζεται επίσης στη μελέτη της διάδοσης της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας και των ηχητικών κυμάτων.

Παράδειγμα 6

Όπως επισημάναμε, η εξίσωση θερμότητας, που ανακαλύφθηκε γύρω στο 1800, είναι μια από τις σημαντικές και κλασικές μερικές διαφορικές εξισώσεις. Περιγράφει την αγωγή της θερμότητας σε ένα στερεό σώμα. Για παράδειγμα, η κατανόηση της διάχυσης της θερμότητας είναι σημαντική για τη βιομηχανία, αλλά και για τους επιστήμονες που μελετούν τη θερμική καταπόνηση που υφίσταται ένα διαστημόπλοιο που εισέρχεται στην ατμόσφαιρα της Γης.



Σχήμα 3.1.3 Μια λεπτή ράβδος.

Θεωρούμε μια λεπτή ράβδο μήκους l (Σχήμα 3.1.3). Θα δείξουμε ότι η

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{1/2}} e^{-x^2/4t}$$

είναι λύση της εξίσωσης θερμότητας

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Λύση Από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{2t^{3/2}}e^{-x^2/4t} + \frac{1}{t^{1/2}}e^{-x^2/4t}\frac{d}{dt}\left(\frac{-x^2}{4t}\right)\\ &= -\frac{1}{2t^{3/2}}e^{-x^2/4t} + \frac{1}{t^{1/2}}\cdot\frac{x^2}{4t^2}e^{-x^2/4t}\\ &= \frac{1}{2t^{3/2}}\left(-1+\frac{x^2}{2t}\right)e^{-x^2/4t},\end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{x}{2t^{3/2}}e^{-x^2/4t}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2t^{3/2}}e^{-x^2/4t} + \frac{x^2}{4t^{(5/2)}}e^{-x^2/4t}\\ &= \frac{\partial u}{\partial t}.\end{aligned}$$

Αυτη η λύση καλείται ***θεμελιώδης λύση*** της εξίσωσης θερμότητας.

Ασκήσεις

Στις Ασκήσεις 1 έως 6, υπολογίστε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης $\partial^2 f/\partial x^2$, $\partial^2 f/\partial x\,\partial y$, $\partial^2 f/\partial y\,\partial x$, $\partial^2 f/\partial y^2$ για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις. Επαληθεύστε το Θεώρημα 1 σε κάθε περίπτωση.

1. $f(x,y) = 2xy/(x^2+y^2)^2$, στο χωρίο όπου $(x,y) \neq (0,0)$

2. $f(x,y,z) = e^z + (1/x) + xe^{-y}$, στο χωρίο όπου $x \neq 0$

3. $f(x,y) = \cos(xy^2)$

4. $f(x,y) = e^{-xy^2} + y^3x^4$

5. $f(x,y) = 1/(\cos^2 x + e^{-y})$

6. $f(x,y) = \log(x-y)$

7. Βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων στο σημείο $\mathbf{x}_0$.

(α) $f(x,y) = \sin(xy)$, $\mathbf{x}_0 = (\pi, 1)$

(β) $f(x,y) = xy^8 + x^2 + y^4$, $\mathbf{x}_0 = (2,-1)$

(γ) $f(x,y,z) = e^{xyz}$, $\mathbf{x}_0 = (0,0,0)$

8. Βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της $f(x,y) = \sec^3(4y-3x)$.

9. Μπορεί να υπάρχει συνάρτηση $f(x,y)$ κλάσης C^2 με $f_x = 2x - 5y$ και $f_y = 4x + y$;

10. Η εξίσωση διάδοσης της θερμότητας είναι $u_t = ku_{xx}$. Ελέγξτε αν η $u(x,t) = e^{-kt}\sin(x)$ είναι λύση.

11. Δείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τη μονοδιάστατη κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

(α) $f(x,t) = \sin(x-ct)$

(β) $f(x,t) = \sin(x)\sin(ct)$

(γ) $f(x,t) = (x-ct)^6 + (x+ct)^6$

12. (α) Δείξτε ότι η $T(x,t) = e^{-kt}\cos x$ ικανοποιεί τη μονοδιάστατη εξίσωση θερμότητας

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}.$$

(β) Δείξτε ότι η $T(x,y,t) = e^{-kt}(\cos x + \cos y)$ ικανοποιεί τη διδιάστατη εξίσωση θερμότητας

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial T}{\partial t}.$$

(γ) Δείξτε ότι η $T(x,y,z,t) = e^{-kt}(\cos x + \cos y + \cos z)$ ικανοποιεί την τριδιάστατη εξίσωση θερμότητας

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial T}{\partial t}.$$

13. Βρείτε τις $\partial^2 z/\partial x^2$, $\partial^2 z/\partial x\,\partial y$, $\partial^2 z/\partial y\,\partial x$ και $\partial^2 z/\partial y^2$ των

(α) $z = 3x^2 + 2y^2$

(β) $z = (2x^2 + 7x^2y)/3xy$, στο χωρίο όπου $x \neq 0$ και $y \neq 0$

14. Βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης των

(α) $z = \sin(x^2 - 3xy)$

(β) $z = x^2y^2e^{2xy}$

15. Βρείτε τις f_{xy}, f_{yz}, f_{zx} και f_{xyz} για την

$$f(x, y, z) = x^2y + xy^2 + yz^2.$$

16. Έστω $z = x^4y^3 - x^8 + y^4$.

(α) Υπολογίστε τις $\partial^3 z/\partial y\,\partial x\,\partial x$, $\partial^3 z/\partial x\,\partial y\,\partial x$ και $\partial^3 z/\partial x\,\partial x\,\partial y$ (που γράφεται επίσης ως $\partial^3 z/\partial x^2 \partial y$).

(β) Υπολογίστε τις $\partial^3 z/\partial x\,\partial y\,\partial y$, $\partial^3 z/\partial y\,\partial x\,\partial y$ και $\partial^3 z/\partial y\,\partial y\,\partial x$ (που γράφεται επίσης ως $\partial^3 z/\partial y^2 \partial x$).

17. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1 δείξτε ότι αν η $f(x, y, z)$ είναι κλάσης C^3, τότε

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial z\,\partial x}.$$

18. Επαληθεύστε ότι

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z\,\partial y\,\partial x}$$

για την $f(x, y, z) = ze^{xy} + yz^3x^2$.

19. Επαληθεύστε ότι $f_{xzw} = f_{zwx}$ για την $f(x, y, z, w) = e^{xyz}\sin(xw)$.

20. Αν η $f(x, y, z, w)$ είναι κλάσης C^3, δείξτε ότι $f_{xzw} = f_{zwx}$.

21. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x, y) = x \arctan(x/y)$

(β) $f(x, y) = \cos\sqrt{x^2 + y^2}$

(γ) $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$

22. Έστω $w = f(x, y)$ μια συνάρτηση δύο μεταβλητών και έστω $x = u + v$, $y = u - v$. Δείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

23. Έστω $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση C^2 και έστω $\mathbf{c}(t)$ μια καμπύλη C^2 στον $\mathbb{R}^2$. Βρείτε την παράγωγο δεύτερης τάξης $(d^2/dt^2)((f \circ \mathbf{c})(t))$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας δύο φορές.

24. Έστω $f(x, y, z) = e^{xz}\tan(yz)$, $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$, $z = k(s, t)$, και έστω η συνάρτηση $m(s, t) = f(g(s, t), h(s, t), k(s, t))$. Βρείτε την m_{st} χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας και επιβεβαιώστε ότι η απάντησή σας είναι συμμετρική ως προς s και t.

25. Μια συνάρτηση $u = f(x, y)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης που ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

καλείται ***αρμονική συνάρτηση***. Δείξτε ότι η συνάρτηση $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ είναι αρμονική.

26. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι αρμονικές; (Βλ. Άσκηση 25.)

(α) $f(x, y) = x^2 - y^2$

(β) $f(x, y) = x^2 + y^2$

(γ) $f(x, y) = xy$

(δ) $f(x, y) = y^3 + 3x^2y$

(ε) $f(x, y) = \sin x \cosh y$

(στ) $f(x, y) = e^x \sin y$

27. (α) Είναι η συνάρτηση $f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2$ αρμονική; Η $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$;

(β) Η εξίσωση του Laplace για συναρτήσεις n μεταβλητών είναι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0.$$

Να βρείτε ένα παράδειγμα συνάρτησης n μεταβλητών που να είναι αρμονική και να δείξετε ότι είναι αρμονική.

28. Δείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι αρμονικές:

(α) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$

(β) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$

29. Έστω ότι οι f και g είναι συναρτήσεις C^2 μίας μεταβλητής και έστω $\phi = f(x - t) + g(x + t)$.

(α) Αποδείξτε ότι η ϕ ικανοποιεί την κυματική εξίσωση: $\partial^2\phi/\partial t^2 = \partial^2\phi/\partial x^2$.

(β) Σχεδιάστε το γράφημα της ϕ συναρτήσει των t και x αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = 0$.

30. (α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x, t) = 2 + e^{-t}\sin x$ ικανοποιεί την εξίσωση θερμότητας: $g_t = g_{xx}$. [Η $g(x, t)$ αναπαριστά τη θερμοκρασία μιας μεταλλικής ράβδου στη θέση x τη χρονική στιγμή t.]

(β) Σχεδιάστε το γράφημα της g για $t \geq 0$. (Υποδειξη: Βρείτε τις τομές με τα επίπεδα $t = 0$, $t = 1$ και $t = 2$.)

(γ) Τι συμβαίνει στην $g(x, t)$ καθώς $t \to \infty$; Ερμηνεύστε αυτό το όριο σε σχέση με τη συμπεριφορά της θερμότητας στη ράβδο.

31. Δείξτε ότι το δυναμικό του Νεύτωνα $V = -GmM/r$ ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \text{για} \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

32. Έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

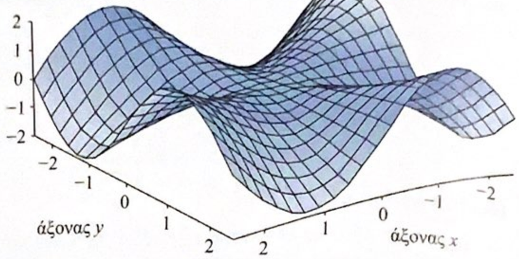
(βλ. Σχήμα 3.1.4).

(α) Αν $(x,y) \neq (0,0)$, υπολογίστε τις $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$.

(β) Δείξτε ότι $(\partial f/\partial x)(0,0) = 0 = (\partial f/\partial y)(0,0)$.

(γ) Δείξτε ότι $(\partial^2 f/\partial x\, \partial y)(0,0) = 1$, $(\partial^2 f/\partial y\, \partial x)(0,0) = -1$.

(δ) Τι πήγε στραβά; Γιατί δεν είναι ίσες οι μεικτές μερικές παράγωγοι;



Σχήμα 3.1.4 Το γράφημα της συνάρτησης της Άσκησης 32.

3.2 Το θεώρημα του Taylor

Όταν εισαγάγαμε την παράγωγο στο Κεφάλαιο 2, είδαμε ότι η *γραμμική προσέγγιση* μιας συνάρτησης παίζει σημαντικό ρόλο για έναν γεωμετρικό λόγο —την εύρεση της εξίσωσης του εφαπτόμενου επιπέδου— αλλά και για έναν αναλυτικό λόγο —την εύρεση προσεγγιστικών τιμών για τη συνάρτηση. Το θεώρημα του Taylor αφορά το σημαντικό ζήτημα της εύρεσης *τετραγωνικών και υψηλότερης τάξης προσεγγίσεων*.

Το θεώρημα του Taylor είναι ένα βασικό εργαλείο για την εύρεση ακριβών αριθμητικών προσεγγίσεων για τις συναρτήσεις και γι' αυτό παίζει σημαντικό ρόλο σε πολλές περιοχές των εφαρμοσμένων και υπολογιστικών μαθηματικών. Θα το χρησιμοποιήσουμε στην επόμενη ενότητα για να διατυπώσουμε το κριτήριο δεύτερης παραγώγου για τα σημεία μεγίστου και ελαχίστου των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.

Η στρατηγική που ακολουθούμε για να αποδείξουμε το θεώρημα του Taylor είναι να το αναγάγουμε στην περίπτωση της μίας μεταβλητής, εξετάζοντας μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών κατά μήκος ευθειών της μορφής $\mathbf{l}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}$ με αφετηρία ένα σημείο $\mathbf{x}_0$ και κινούμενοι κατά την κατεύθυνση του $\mathbf{h}$. Γι' αυτό, είναι χρήσιμο να ξεκινήσουμε με μια ανασκόπηση του θεωρήματος του Taylor για τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής.

Το θεώρημα του Taylor για συναρτήσεις μίας μεταβλητής

Όταν επαναλαμβάνουμε κάποιο θεώρημα που έχουμε συναντήσει σε κάποιο προηγούμενο μάθημα, είναι χρήσιμο να κάνουμε τις εξής βασικές ερωτήσεις: Ποιο είναι το βασικό σημείο του θεωρήματος; Ποιες είναι οι κεντρικές ιδέες της απόδειξης; Μπορούμε να το κατανοήσουμε καλύτερα τη δεύτερη φορά που το βλέπουμε;

Το βασικό σημείο του θεωρήματος του Taylor για τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής είναι η εύρεση προσεγγίσεων μιας συνάρτησης κοντά σε ένα δεδομένο σημείο που είναι ακριβείς κατά τάξη υψηλότερη από τη γραμμική προσέγγιση. Η κεντρική ιδέα της απόδειξης είναι η χρήση του *θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού* και κατόπιν της *ολοκλήρωσης κατά μέρη*. Μάλιστα, έχοντας κατά νου αυτές τις βασικές ιδέες, μπορούμε να ανακατασκευάσουμε ολόκληρη την απόδειξη. Αυτός ο τρόπος σκέψης θα μας βοηθήσει να οργανώσουμε όλα τα κομμάτια που πρέπει να συνδυάσουμε ώστε να κατανοήσουμε σε βάθος τις προσεγγίσεις Taylor για τις συναρτήσεις μίας και πολλών μεταβλητών.

Για μια ομαλή συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μίας μεταβλητής, το θεώρημα του Taylor λέει ότι

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + R_k(x_0,h), \qquad (1)$$

όπου

$$R_k(x_0, h) = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0 + h - \tau)^k}{k!} f^{k+1}(\tau)\, d\tau$$

είναι το υπόλοιπο. Για μικρό h, αυτό το υπόλοιπο είναι μικρό σε τάξη k υπό την έννοια ότι

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_k(x_0, h)}{h^k} = 0. \tag{2}$$

Με άλλα λόγια, το $R_k(x_0, h)$ είναι μικρό σε σύγκριση με την ήδη μικρή ποσότητα h^k.

Τα παραπάνω αποτελούν την τυπική διατύπωση του θεωρήματος του Taylor. Και η απόδειξη; Όπως υποσχεθήκαμε, ξεκινάμε με το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, γραμμένο στην εξής μορφή:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f'(\tau)\, d\tau.$$

Στη συνέχεια γράφουμε $d\tau = -d(x_0 + h - \tau)$ και ολοκληρώνουμε κατά μέρη,[1] οπότε παίρνουμε

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \int_{x_0}^{x_0+h} f''(\tau)(x_0 + h - \tau)\, d\tau,$$

που είναι το ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης. Ολοκληρώνοντας ξανά κατά μέρη, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x_0+h} f''(\tau)(x_0 + h - \tau)\, d\tau \\
&= -\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_0+h} f''(\tau)\, d(x_0 + h - \tau)^2 \\
&= \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_0+h} f'''(\tau)(x_0 + h - \tau)^2\, d\tau,
\end{aligned}$$

το οποίο, με αντικατάσταση στον προηγούμενο τύπο, δίνει το ***ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης***:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_0+h} f'''(\tau)(x_0 + h - \tau)^2\, d\tau.$$

Αυτό είναι το θεώρημα του Taylor για $k = 2$.

Το θεώρημα του Taylor για οποιοδήποτε k προκύπτει με επαναληπτική ολοκλήρωση κατά μέρη. Ο ισχυρισμός (2) ότι $R_k(x_0, h)/h^k \to 0$ καθώς $h \to 0$ προκύπτει ως εξής: Για τ στο διάστημα $[x_0, x_0 + h]$ έχουμε $|x_0 + h - \tau| \leq |h|$, ενώ η $f^{k+1}(\tau)$ είναι φραγμένη επειδή είναι συνεχής. Αν θεωρήσουμε ότι $|f^{k+1}(\tau)| \leq M$, τότε

$$|R_k(x_0, h)| = \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0 + h - \tau)^k}{k!} f^{k+1}(\tau)\, d\tau \right| \leq \frac{|h|^{k+1}}{k!} M$$

και, ειδικότερα, $|R_k(x_0, h)/h^k| \leq |h|\, M/k! \to 0$ καθώς $h \to 0$.

---

[1] Υπενθυμίζουμε ότι η ολοκλήρωση κατά μέρη (ο κανόνας του γινομένου για την παράγωγο διατυπωμένος αντίστροφα) έχει ως εξής:

$$\int_a^b u\, dv = uv\,|_a^b - \int_a^b v\, du.$$

Εδώ επιλέγουμε $u = f'(\tau)$ και $v = x_0 + h - \tau$.

Το θεώρημα του Taylor για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Επόμενος στόχος μας σε αυτή την ενότητα είναι να αποδείξουμε ένα αντίστοιχο θεώρημα που να ισχύει για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Γνωρίζουμε ήδη την εκδοχή πρώτης τάξης, δηλαδή όταν $k = 1$. Πράγματι, αν η $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και ορίσουμε

$$R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{h}),$$

οπότε

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{h}) + R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

τότε από τον ορισμό της παραγωγισιμότητας,

$$\frac{|R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} \to 0 \quad \text{καθώς} \quad \mathbf{h} \to 0.$$

δηλαδή το $R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$ μηδενίζεται σε πρώτη τάξη στο $\mathbf{x}_0$. Συνοψίζοντας, έχουμε:

Θεώρημα 2 Ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης Αν η $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 \in U$, τότε

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

όπου $R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})/\|\mathbf{h}\| \to 0$ καθώς $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ στον $\mathbb{R}^n$.

Η εκδοχή δεύτερης τάξης είναι η εξής:

Θεώρημα 3 Ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης Αν η $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους τρίτης τάξης[2], τότε μπορούμε να γράψουμε

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(\mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

όπου $R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})/\|\mathbf{h}\|^2 \to 0$ καθώς $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, και στο δεύτερο άθροισμα τα i και j παίρνουν τιμές από 1 έως n (άρα υπάρχουν n^2 όροι).

[2] Για τη διατύπωση του θεωρήματος όπως παρουσιάζεται εδώ, η f αρκεί να είναι κλάσης C^2, αλλά για να έχει πιο βολική μορφή το υπόλοιπο θεωρούμε ότι η f είναι κλάσης C^3.

Προσέξτε ότι αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να γραφτεί με χρήση πινάκων ως εξής:

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) &+ \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]\begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \\
&+ \frac{1}{2}[h_1, \dots, h_n]\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}, \\
&+ R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),
\end{aligned}
$$

όπου οι τιμές των παραγώγων της f υπολογίζονται στο $\mathbf{x}_0$.

Στη πορεία της απόδειξης του Θεωρήματος 3, θα βρούμε έναν χρήσιμο αναλυτικό τύπο για το υπόλοιπο, όπως στο θεώρημα για τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής.

Απόδειξη του θεωρήματος 3 Έστω $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$ με $\mathbf{x}_0$ και $\mathbf{h}$ σταθερά και $\mathbf{h}$ αρκετά μικρό ώστε το $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}$ να ανήκει στο U για κάθε t στο $[0, 1]$, η οποία είναι μια συνάρτηση C^3 του t. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Taylor (1) για τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής στην g, με $k = 2$, παίρνουμε

$$
\left.\begin{aligned}
&g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{g''(0)}{2!} + R_2, \\
\text{όπου}\quad & \\
&R_2 = \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2!} g'''(t)\,dt.
\end{aligned}\right\}
$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$
g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i, \qquad g''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j
$$

και

$$
g'''(t) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_k}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j h_k.
$$

Γράφουμε $R_2 = R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$, οπότε έχουμε αποδείξει ότι:

$$
\left.\begin{aligned}
&f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(\mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}), \\
\text{όπου}\quad & \\
&R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_k}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j h_k\,dt.
\end{aligned}\right\} \quad (3)
$$

Η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι συνεχής συνάρτηση του t οπότε φράσσεται από μια θετική σταθερά C σε μια μικρή γειτονιά του $\mathbf{x}_0$ (διότι πρέπει να είναι κοντά στην τιμή της στο $\mathbf{x}_0$).

Προσέξετε επίσης ότι $|h_i| \leq \|\mathbf{h}\|$, για μικρό $\|\mathbf{h}\|$, οπότε

$$|R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})| \leq \|\mathbf{h}\|^3 C. \tag{4}$$

Ειδικότερα,

$$\frac{|R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|^2} \leq \|\mathbf{h}\| C \to 0 \quad \text{καθώς} \quad \mathbf{h} \to \mathbf{0},$$

όπως απαιτεί το θεώρημα.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2 έπεται με αντίστοιχο τρόπο από το ανάπτυγμα Taylor (1) για $k = 1$. Με παρόμοιο συλλογισμό για το R_1 προκύπτει ότι $|R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})|/\|\mathbf{h}\| \to 0$ καθώς $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, αν και αυτό έπεται επίσης αμέσως από τον ορισμό της παραγωγισιμότητας. ■

Μορφές του υπολοίπου Στο Θεώρημα 2,

$$R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) h_i h_j \, dt = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{c}_{ij}) h_i h_j, \tag{5}$$

όπου το $\mathbf{c}_{ij}$ βρίσκεται κάπου πάνω στην ευθεία που συνδέει το $\mathbf{x}_0$ με το $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$.

Στο Θεώρημα 3,

$$\begin{aligned} R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \, \partial x_j \, \partial x_k}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) h_i h_j h_k \, dt \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \, \partial x_j \, \partial x_k}(\mathbf{c}_{ijk}) h_i h_j h_k, \end{aligned} \tag{5'}$$

όπου το $\mathbf{c}_{ijk}$ βρίσκεται κάπου πάνω στην ευθεία που συνδέει το $\mathbf{x}_0$ με το $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$.

Οι τύποι με τα $\mathbf{c}_{ij}$ και $\mathbf{c}_{ijk}$ (που ονομάζονται μορφή Lagrange του υπολοίπου) προκύπτουν με χρήση του *δεύτερου θεωρήματος μέσης τιμής για τα ολοκληρώματα*, το οποίο λέει ότι

$$\int_a^b h(t) g(t) \, dt = h(c) \int_a^b g(t) \, dt,$$

αν οι h και g είναι συνεχείς και $g \geq 0$ στο $[a, b]$. Εδώ το c είναι κάποιος αριθμός μεταξύ a και b.[3] Εφαρμόζουμε το παραπάνω στον τύπο (4) που δίνει αναλυτικά το υπόλοιπο με $h(t) = (\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$ και $g(t) = 1 - t$.

[3] *Απόδειξη* Αν $g = 0$, το αποτέλεσμα είναι προφανές, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $g \neq 0$. Συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\int_a^b g(t)\,dt > 0$. Έστω M και m η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της h, τις οποίες παίρνει στα σημεία t_M και t_m, αντίστοιχα. Επειδή $g(t) \geq 0$,

$$m \int_a^b g(t)\,dt \leq \int_a^b h(t) g(t)\,dt \leq M \int_a^b g(t)\,dt.$$

Άρα το $(\int_a^b h(t)g(t)\,dt)/(\int_a^b g(t)\,dt)$ βρίσκεται μεταξύ $m = h(t_m)$ και $M = h(t_M)$ και συνεπώς, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, ισούται με $h(c)$ για κάποιο ενδιάμεσο c. ■

Το ανάπτυγμα Taylor τρίτης τάξης είναι

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(\mathbf{x}_0)$$
$$+ \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^{n} h_i h_j h_k \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \, \partial x_j \, \partial x_k}(\mathbf{x}_0) + R_3(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

όπου $R_3(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})/\|\mathbf{h}\|^3 \to 0$ καθώς $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, κ.ο.κ. Ο γενικός τύπος μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή, με τον τρόπο απόδειξης που έχουμε παρουσιάσει.

Παράδειγμα 1 Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης της συνάρτησης $f(x, y) = \sin(x + 2y)$ γύρω από το σημείο $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.

Λύση Παρατηρούμε ότι

$$f(0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \cos(0 + 2 \cdot 0) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2\cos(0 + 2 \cdot 0) = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(0,0) = 0.$$

Άρα

$$f(\mathbf{h}) = f(h_1, h_2) = h_1 + 2h_2 + R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h}),$$

όπου

$$\frac{R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} \to 0 \qquad \text{καθώς} \qquad \mathbf{h} \to \mathbf{0}.$$

▲

Παράδειγμα 2 Υπολογίστε το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης της $f(x, y) = e^x \cos y$ γύρω από το σημείο $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Λύση Έχουμε

$$f(0,0) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(0,0) = 0,$$

άρα

$$f(\mathbf{h}) = f(h_1, h_2) = 1 + h_1 + \tfrac{1}{2}h_1^2 - \tfrac{1}{2}h_2^2 + R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h}),$$

όπου

$$\frac{R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} \to 0 \quad \text{καθώς} \quad \mathbf{h} \to \mathbf{0}.$$

▲

Στην περίπτωση των συναρτήσεων μίας μεταβλητής μπορούμε να αναπτύξουμε την $f(x)$

στην άπειρη δυναμοσειρά

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)h^k}{k!} + \cdots,$$

που καλείται ***σειρά Taylor***, υπό τον όρο ότι μπορούμε να δείξουμε ότι $R_k(x_0, h) \to 0$ καθώς $k \to \infty$. Με αντίστοιχο τρόπο, στις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, οι παραπάνω όροι αντικαθίστανται από τους αντίστοιχους όρους όπου εμφανίζονται οι μερικές παράγωγοι, όπως είδαμε στο Θεώρημα 3. Και σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να αναπαραστήσουμε μια τέτοια συνάρτηση με τη σειρά Taylor της υπό τον όρο ότι μπορούμε να δείξουμε ότι $R_k \to 0$ καθώς $k \to \infty$. Αυτό το ζήτημα εξετάζεται περαιτέρω στην Άσκηση 13.

Τα πολυώνυμα Taylor πρώτης, δεύτερης και τρίτης τάξης ονομάζονται επίσης προσεγγίσεις Taylor πρώτης, δεύτερης και τρίτης τάξης της f, αφού θεωρείται ότι το υπόλοιπο είναι μικρό και γίνεται μικρότερο καθώς αυξάνεται η τάξη του πολυωνύμου Taylor.

Παράδειγμα 3 Βρείτε τις προσεγγίσεις Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της $f(x,y) = \sin(xy)$ στο σημείο $(x_0, y_0) = (1, \pi/2)$.

Λύση Έχουμε

$$\begin{aligned}
f(x_0,y_0) &= \sin(x_0y_0) = \sin(\pi/2) = 1\\
f_x(x_0,y_0) &= y_0 \cos(x_0y_0) = \frac{\pi}{2}\cos(\pi/2) = 0\\
f_y(x_0,y_0) &= x_0 \cos(x_0y_0) = \cos(\pi/2) = 0\\
f_{xx}(x_0,y_0) &= -y_0^2 \sin(x_0y_0) = -\frac{\pi^2}{4}\sin(\pi/2) = -\frac{\pi^2}{4}\\
f_{xy}(x_0,y_0) &= \cos(x_0y_0) - x_0y_0\sin(x_0y_0) = -\frac{\pi}{2}\sin(\pi/2) = -\frac{\pi}{2}\\
f_{yy}(x_0,y_0) &= -x_0^2\sin(x_0y_0) = -\sin(\pi/2) = -1.
\end{aligned}$$

Άρα η γραμμική (πρώτης τάξης) προσέγγιση είναι

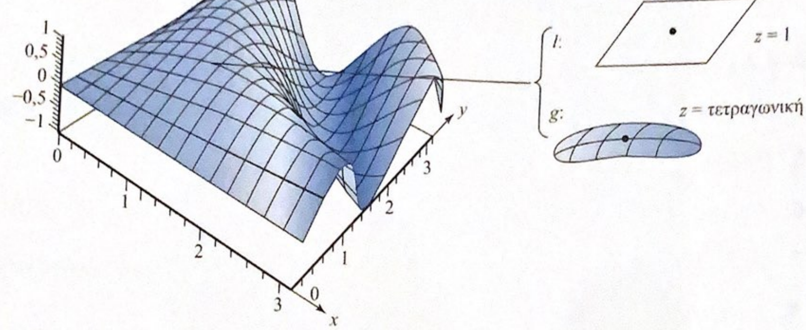
$$\begin{aligned}
l(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)\\
&= 1+0+0 = 1,
\end{aligned}$$

ενώ η δεύτερης τάξης (ή τετραγωνική) προσέγγιση είναι

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= 1+0+0+\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi^2}{4}\right)(x-1)^2 + \left(-\frac{\pi}{2}\right)(x-1)\left(y-\frac{\pi}{2}\right)\\
&\quad + \frac{1}{2}(-1)\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2\\
&= 1 - \frac{\pi^2}{8}(x-1)^2 - \frac{\pi}{2}(x-1)\left(y-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Βλ. Σχήμα 3.2.1. ▲

Παράδειγμα 4 Βρείτε τη γραμμική και την τετραγωνική προσέγγιση της έκφρασης $(3{,}98-1)^2/(5{,}97-3)^2$. Συγκρίνετέ τις με την ακριβή τιμή.



Σχήμα 3.2.1 Η γραμμική και η τετραγωνική προσέγγιση της $z = \sin(xy)$ κοντά στο $(1, \pi/2)$.

Λύση Έστω $f(x,y) = (x-1)^2/(y-3)^2$. Η ζητούμενη έκφραση είναι κοντά στο $f(4,6) = 1$. Για να βρούμε τις προσεγγίσεις, παραγωγίζουμε:

$$f_x = \frac{2(x-1)}{(y-3)^2}, \qquad f_y = \frac{-2(x-1)^2}{(y-3)^3}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{-4(x-1)}{(y-3)^3}, \qquad f_{xx} = \frac{2}{(y-3)^2}, \qquad f_{yy} = \frac{6(x-1)^2}{(y-3)^4}.$$

Στο σημείο της προσέγγισης, έχουμε

$$f_x(4,6) = \frac{2}{3}, \qquad f_y = -\frac{2}{3}, \qquad f_{xy} = f_{yx} = -\frac{4}{9}, \qquad f_{xx} = \frac{2}{9}, \qquad f_{yy} = \frac{2}{3}.$$

Επομένως, η γραμμική προσέγγιση είναι

$$1 + \frac{2}{3}(-0{,}02) - \frac{2}{3}(-0{,}03) = 1{,}00666.$$

Η τετραγωνική προσέγγιση είναι

$$1 + \frac{2}{3}(-0{,}02) - \frac{2}{3}(-0{,}03) + \frac{2}{9}\frac{(-0{,}02)^2}{2} - \frac{4}{9}(-0{,}02)(-0{,}03) + \frac{2}{3}\frac{(-0{,}03)^2}{2}$$
$$= 1{,}00674.$$

Χρησιμοποιώντας κομπιουτεράκι, βρίσκουμε ότι η «ακριβής» τιμή είναι 1,00675. ▲

Ασκήσεις

1. Έστω $f(x,y) = e^{x+y}$.
   (α) Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης της f στο $(0,0)$.
   (β) Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης της f στο $(0,0)$.

2. Υποθέστε ότι η $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική, οπότε η L έχει τη μορφή $L(x,y) = ax + by$.
   (α) Βρείτε την προσέγγιση Taylor πρώτης τάξης της L.
   (β) Βρείτε την προσέγγιση Taylor δεύτερης τάξης της L.
   (γ) Τι μορφή θα έχουν οι προσεγγίσεις υψηλότερης τάξης;

Άρα η δράση έχει την ίδια φυσική μονάδα με την ποσότητα

$$\text{Ενέργεια} \times \text{Χρόνος},$$

διότι η ταχύτητα είναι απόσταση δια χρόνος.

Στα 250 χρόνια που ακολούθησαν τη διατύπωση της αρχής του Maupertuis, έχει διαπιστωθεί ότι η *αρχή της ελάχιστης δράσης* αποτελεί τη «θεωρητική βάση» του νόμου της βαρύτητας του Νεύτωνα, των εξισώσεων του Maxwell για τον ηλεκτρομαγνητισμό, της κβαντομηχανικής εξίσωσης του Schrödinger και της εξίσωσης πεδίου του Einstein στη γενική θεωρία της σχετικότητας.

Η αρχή της ελάχιστης δράσης δεν εξαντλείται εδώ και θα την ξαναδούμε στην Ενότητα 4.1 και στο διαδικτυακό συμπλήρωμα.

Σημεία μεγίστου και ελαχίστου συναρτήσεων n μεταβλητών

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι, για τον Leibniz, τον Euler και τον Maupertuis, αλλά και για μεγάλο μέρος της σύγχρονης επιστήμης, όλα στη φύση είναι συνέπεια μιας αρχής μέγιστου ή ελαχίστου. Για να μπορούμε όμως να εφαρμόζουμε τέτοιες γενικές θεωρίες —αλλά και κάποιες πιο χειροπιαστές— πρέπει πρώτα να μάθουμε τις τεχνικές εύρεσης των σημείων μεγίστου και ελαχίστου (μεγίστων και ελαχίστων) των συναρτήσεων n μεταβλητών.

Σημεία ακροτάτου

Στα βασικότερα γεωμετρικά γνωρίσματα του γραφήματος μιας συνάρτησης συγκαταλέγονται τα σημεία ακροτάτου, όπου η συνάρτηση παίρνει τις μεγαλύτερες και μικρότερες τιμές της. Σε αυτή την ενότητα θα αναπτύξουμε μια μέθοδο προσδιορισμού αυτών των σημείων. Στην πραγματικότητα, η μέθοδος εντοπίζει και τα τοπικά ακρότατα. Πρόκειται για τα σημεία όπου η συνάρτηση παίρνει μια μέγιστη ή ελάχιστη τιμή σε σχέση μόνο με τα γειτονικά σημεία. Ας ξεκινήσουμε με τους απαραίτητους ορισμούς.

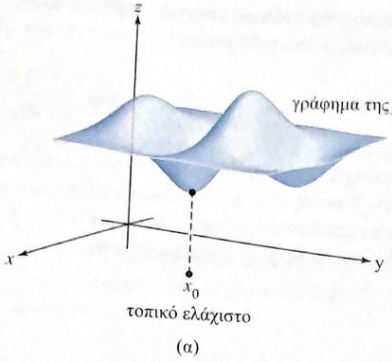
Ορισμός Έστω $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ δεδομένη βαθμωτή συνάρτηση. Ένα σημείο $\mathbf{x}_0 \in U$ καλείται ***τοπικό ελάχιστο*** της f αν υπάρχει μια γειτονιά V του $\mathbf{x}_0$ τέτοια ώστε για κάθε σημείο $\mathbf{x}$ στο V, $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$. (Βλ. Σχήμα 3.3.2.) Με αντίστοιχο τρόπο, το $\mathbf{x}_0 \in U$ είναι ***τοπικό μέγιστο*** αν υπάρχει μια γειτονιά V του $\mathbf{x}_0$ τέτοια ώστε $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ για κάθε $\mathbf{x} \in V$. Λέμε ότι το σημείο $\mathbf{x}_0 \in U$ είναι ***τοπικό***, ή ***σχετικό***, ***ακρότατο*** αν είναι τοπικό ελάχιστο ή τοπικό μέγιστο. Ένα σημείο $\mathbf{x}_0$ είναι ***κρίσιμο σημείο*** της f αν η f *δεν είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbf{x}_0$ ή, αν είναι, $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Ένα κρίσιμο σημείο που δεν είναι τοπικό ακρότατο καλείται ***σαγματικό σημείο***.[4]

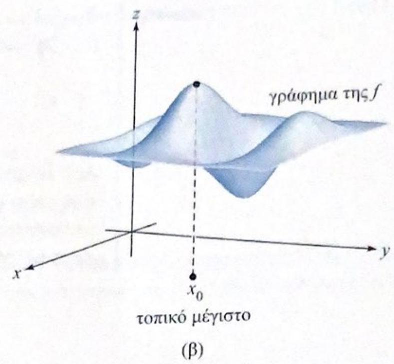
Κριτήριο πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα

Ο εντοπισμός των ακροτάτων βασίζεται στο παρακάτω γεγονός, το οποίο θα πρέπει να γνωρίζετε από τον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής (την περίπτωση $n = 1$): *Κάθε ακρότατο είναι κρίσιμο σημείο.*

Θεώρημα 4 Κριτήριο πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα Αν το $U \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό, η συνάρτηση $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και το $\mathbf{x}_0 \in U$ είναι τοπικό ακρότατο, τότε $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, δηλαδή το $\mathbf{x}_0$ είναι κρίσιμο σημείο της f.

[4] Μερικές φορές ο όρος «σαγματικό σημείο» δεν χρησιμοποιείται τόσο γενικά· θα εξετάσουμε περαιτέρω τα σαγματικά σημεία στην πορεία.





Σχήμα 3.3.2 Σημεία (α) τοπικού ελαχίστου και (β) τοπικού μεγίστου μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών.

Απόδειξη Έστω ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο $\mathbf{x_0}$. Σε αυτή την περίπτωση, για οποιοδήποτε $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, η συνάρτηση $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$ έχει τοπικό μέγιστο στο $t = 0$. Επομένως, από τον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, $g'(0) = 0$.[5] Από την άλλη πλευρά, από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$g'(0) = [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{h}.$$

Επομένως, $[\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{h} = 0$ για κάθε $\mathbf{h}$, οπότε $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Η περίπτωση όπου η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $\mathbf{x}_0$ είναι εντελώς ανάλογη. ■

Αν θυμηθούμε ότι η ισότητα $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ σημαίνει πως όλες οι συνιστώσες της $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ είναι μηδέν, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 4: Αν το $\mathbf{x}_0$ είναι τοπικό ακρότατο, τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0, \qquad i = 1, \dots, n,$$

δηλαδή όλες οι μερικές παράγωγοι είναι μηδέν στο $\mathbf{x}_0$. Με άλλα λόγια, $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, όπου ∇f είναι η κλίση της f.

Αν θέλουμε να βρούμε τα ακρότατα ή τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης, το Θεώρημα 4 μας λέει ότι θα πρέπει να τα αναζητήσουμε μεταξύ των κρίσιμων σημείων. Μερικές φορές ο έλεγχος μπορεί να γίνει με το μάτι, αλλά συνήθως χρησιμοποιούμε κριτήρια (τα οποία θα αναπτύξουμε παρακάτω) αντίστοιχα με το κριτήριο δεύτερης παραγώγου του λογισμού των συναρτήσεων μίας μεταβλητής.

Παράδειγμα 1 Να βρείτε τα σημεία μεγίστου και ελαχίστου της συνάρτησης $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την $f(x, y) = x^2 + y^2$. (Παραβλέψτε το γεγονός ότι μπορούμε να λύσουμε αυτό το παράδειγμα με το μάτι.)

---

[5] Υπενθυμίζουμε την απόδειξη από τον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής: Επειδή το $g(0)$ είναι τοπικό μέγιστο, έχουμε ότι $g(t) \leq g(0)$ για μικρό $t > 0$, συνεπώς $g(t) - g(0) \leq 0$, και επομένως $g'(0) = \lim_{t\to 0^+} (g(t) - g(0))/t \leq 0$, όπου $\lim_{t\to 0^+}$ σημαίνει το όριο καθώς $t \to 0$, $t > 0$. Για μικρό $t < 0$, με αντίστοιχο τρόπο έχουμε $g'(0) = \lim_{t\to 0^-} (g(t) - g(0))/t \geq 0$. Συνεπώς, $g'(0) = 0$.

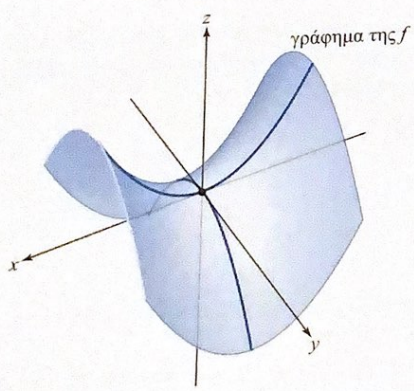
Λύση Αρχικά εντοπίζουμε τα κρίσιμα σημεία της f λύνοντας τις δύο εξισώσεις $\partial f/\partial x = 0$ και $\partial f/\partial y = 0$ ως προς x και y. Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y,$$

άρα το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι η αρχή των αξόνων $(0,0)$, όπου η τιμή της συνάρτησης είναι μηδέν. Επειδή $f(x,y) \geq 0$, αυτό το σημείο είναι τοπικό ελάχιστο —στην πραγματικότητα είναι απόλυτο, ή ολικό, ελάχιστο— της f. Επειδή το $(0,0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο, δεν υπάρχουν σημεία μεγίστου. ▲

Παράδειγμα 2 Θεωρήστε τη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 - y^2$. Παραβλέποντας προς το παρόν το γεγονός ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση έχει ένα σαγματικό σημείο και κανένα ακρότατο, εφαρμόστε τη μέθοδο εντοπισμού ακροτάτων του Θεωρήματος 4.

Λύση Όπως στο Παράδειγμα 1, βρίσκουμε ότι η f έχει μόνο ένα κρίσιμο σημείο, στην αρχή των αξόνων, και ότι η τιμή της f σε αυτό το σημείο είναι μηδέν. Εξετάζοντας τις τιμές της f απευθείας για σημεία κοντά στην αρχή των αξόνων, διαπιστώνουμε ότι $f(x,0) \geq f(0,0)$ και $f(0,y) \leq f(0,0)$, με αυστηρές ανισότητες όταν $x \neq 0$ και $y \neq 0$. Επειδή τα x ή y μπορεί να γίνουν οσοδήποτε μικρά, η αρχή των αξόνων δεν μπορεί να είναι ούτε τοπικό ελάχιστο ούτε τοπικό μέγιστο (άρα είναι σαγματικό σημείο). Επομένως, η συγκεκριμένη συνάρτηση δεν μπορεί να έχει τοπικά ακρότατα (βλ. Σχήμα 3.3.3).



Σχήμα **3.3.3** Μια συνάρτηση δύο μεταβλητών με σαγματικό σημείο.

▲

Παράδειγμα 3 Βρείτε όλα τα κρίσιμα σημεία της $z = x^2y + y^2x$.

Λύση Παραγωγίζοντας, παίρνουμε

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + x^2.$$

Εξισώνοντας τις μερικές παραγώγους με το μηδέν, έχουμε

$$2xy + y^2 = 0, \qquad 2xy + x^2 = 0.$$

Αφαιρώντας, παίρνουμε $x^2 = y^2$, οπότε $x = \pm y$. Αντικαθιστώντας $x = +y$ στην πρώτη από τις δύο παραπάνω εξισώσεις, βρίσκουμε ότι

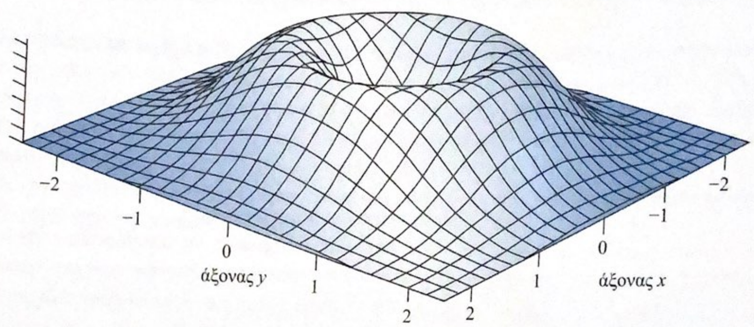
$$2y^2 + y^2 = 3y^2 = 0,$$

οπότε $y = 0$ και άρα $x = 0$. Αν $x = -y$, τότε

$$-2y^2 + y^2 = -y^2 = 0,$$

άρα $y = 0$ και συνεπώς $x = 0$. Επομένως, το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(0, 0)$. Για $x = y$ έχουμε $z = 2x^3$, που είναι και θετικό και αρνητικό για x κοντά μηδέν. Άρα το $(0, 0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο. ▲

Παράδειγμα 4 Στο Σχήμα 3.3.4, παρουσιάζεται ένα γράφημα της συνάρτησης $z = 2(x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$ σχεδιασμένο από υπολογιστή. Πού βρίσκονται το κρίσιμα σημεία;



Σχήμα 3.3.4 Το ηφαίστειο: $z = 2(x^2 + y^2)\exp(-x^2 - y^2)$.

Λύση Επειδή $z = 2(x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 4x(e^{-x^2-y^2}) + 2(x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}(-2x)\\ &= e^{-x^2-y^2}[4x - 4x(x^2 + y^2)]\\ &= 4x(e^{-x^2-y^2})(1 - x^2 - y^2)\end{aligned}$$

και

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y(e^{-x^2-y^2})(1 - x^2 - y^2).$$

Και οι δύο μηδενίζονται όταν $x = y = 0$ ή όταν $x^2 + y^2 = 1$. Αυτό συμφωνεί με το σχήμα: Τα σημεία στο χείλος του κρατήρα είναι σημεία μεγίστου και η αρχή των αξόνων είναι σημείο ελαχίστου. ▲

Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για τοπικά ακρότατα

Το υπόλοιπο αυτής της ενότητας είναι αφιερωμένο στην ανάπτυξη ενός κριτηρίου, στηριγμένου στη δεύτερη παράγωγο, που μας επιτρέπει να ελέγχουμε αν ένα κρίσιμο σημείο είναι τοπικό ακρότατο. Στην ειδική περίπτωση $n = 1$, το κριτήριο αυτό μετατρέπεται στη γνωστή συνθήκη από τον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής: $f''(x_0) > 0$ για ελάχιστο και $f''(x_0) < 0$ για μέγιστο. Στη γενική όμως περίπτωση η δεύτερη παράγωγος είναι ένα αρκετά σύνθετο μαθηματικό αντικείμενο. Για να διατυπώσουμε το κριτήριό μας, θα εισαγάγουμε μια εκδοχή της δεύτερης παραγώγου που ονομάζεται «εσσιανή», η οποία με τη σειρά της σχετίζεται με τις τετραγωνικές συναρτήσεις. ***Τετραγωνικές συναρτήσεις*** είναι οι συναρτήσεις $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ της μορφής

$$g(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$$

για κάποιον πίνακα $n \times n$ $[a_{ij}]$. Χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιασμό πινάκων, μπορούμε να γράψουμε

$$g(h_1, \dots, h_n) = [h_1 \cdots h_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}.$$

Για παράδειγμα, αν $n = 3$, η

$$\begin{aligned} g(h_1, h_2, h_3) &= h_1^2 - 2h_1 h_2 + h_3^2 \\ &= [h_1\, h_2\, h_3] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

είναι τετραγωνική συνάρτηση.

Αν θέλουμε, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο $[a_{ij}]$ είναι συμμετρικός· η g παραμένει αμετάβλητη αν αντικαταστήσουμε τον $[a_{ij}]$ με τον συμμετρικό πίνακα $[b_{ij}]$, όπου $b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$, διότι $h_i h_j = h_j h_i$ και η άθροιση γίνεται ως προς όλα τα i και j. Ο *τετραγωνικός* χαρακτήρας της g αποτυπώνεται στην ταυτότητα

$$g(\lambda h_1, \dots, \lambda h_n) = \lambda^2 g(h_1, \dots, h_n),$$

η οποία έπεται από τον ορισμό.

Είμαστε πλέον έτοιμοι να ορίσουμε τις εσσιανές συναρτήσεις (που φέρουν τον όνομα του Ludwig Otto Hesse, ο οποίος τις εισήγαγε το 1844).

Ορισμός Έστω ότι η συνάρτηση $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ έχει συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης $(\partial^2 f/\partial x_i\, \partial x_j)(\mathbf{x}_0)$, για $i, j = 1, \dots, n$, σε ένα σημείο $\mathbf{x}_0 \in U$. Η ***εσσιανή της f στο $\mathbf{x}_0$*** είναι η τετραγωνική συνάρτηση που ορίζεται από την

$$\begin{aligned} Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j \\ &= \frac{1}{2}[h_1, \dots, h_n] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_n} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\, \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\, \partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Προσέξτε ότι, λόγω της ισότητας των μεικτών μερικών παραγώγων, ο πίνακας των παραγώγων δεύτερης τάξης είναι συμμετρικός.

Αυτή η συνάρτηση χρησιμοποιείται συνήθως στα κρίσιμα σημεία $\mathbf{x}_0 \in U$. Σε αυτή την περίπτωση, $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, οπότε το ανάπτυγμα Taylor (βλ. Θεώρημα 2, Ενότητα 3.2) μπορεί να γραφτεί ως

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}).$$

Επομένως, *σε ένα κρίσιμο σημείο η εσσιανή ισούται με τον πρώτο μη σταθερό όρο της σειράς Taylor της* f.

Μια τετραγωνική συνάρτηση $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ καλείται ***θετικά ορισμένη*** αν $g(\mathbf{h}) \geq 0$ για κάθε $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ και $g(\mathbf{h}) = 0$ μόνο για $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. Με αντίστοιχο τρόπο, η g είναι ***αρνητικά ορισμένη*** αν $g(\mathbf{h}) \leq 0$ και $g(\mathbf{h}) = 0$ μόνο για $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. Να σημειωθεί ότι αν $n = 1$, τότε $Hf(x_0)(h) = \frac{1}{2}f''(x_0)h^2$, που είναι θετικά ορισμένη αν και μόνο αν $f''(x_0) > 0$.

Θεώρημα 5 Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για τοπικά ακρότατα Αν η συνάρτηση $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι κλάσης C^3, $\mathbf{x}_0 \in U$ είναι ένα κρίσιμο σημείο της f και η εσσιανή $Hf(\mathbf{x}_0)$ είναι θετικά ορισμένη, τότε το $\mathbf{x}_0$ είναι τοπικό ελάχιστο της f. Με αντίστοιχο τρόπο, αν η $Hf(\mathbf{x}_0)$ είναι αρνητικά ορισμένη, το $\mathbf{x}_0$ είναι τοπικό μέγιστο.

Θα αποδείξουμε ότι τα ακρότατα που μας δίνει αυτό το κριτήριο είναι στην πραγματικότητα *αυστηρά*. Λέμε ότι ένα τοπικό μέγιστο $\mathbf{x}_0$ είναι ***αυστηρό*** αν $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$ για γειτονικά $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. Τα αυστηρά τοπικά ελάχιστα ορίζονται με αντίστοιχο τρόπο. Επιπλέον, το θεώρημα ισχύει ακόμα και αν η f είναι μόνο κλάσης C^2· υποθέσαμε ότι είναι κλάσης C^3 χάριν απλότητας.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 5 απαιτείται το θεώρημα του Taylor και το παρακάτω αποτέλεσμα από τη γραμμική άλγεβρα.

Λήμμα 1 Αν $B = [b_{ij}]$ είναι ένας $n \times n$ πραγματικός πίνακας και η αντίστοιχη τετραγωνική συνάρτηση

$$H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (h_1, \ldots, h_n) \mapsto \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}h_ih_j$$

είναι θετικά ορισμένη, τότε υπάρχει μια σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$,

$$H(\mathbf{h}) \geq M\|\mathbf{h}\|^2.$$

Απόδειξη Για $\|\mathbf{h}\| = 1$, θέτουμε $g(\mathbf{h}) = H(\mathbf{h})$. Σε αυτή την περίπτωση η g είναι συνεχής συνάρτηση του $\mathbf{h}$ για $\|\mathbf{h}\| = 1$, οπότε έχει ελάχιστη τιμή, έστω M.[6] Επειδή η H είναι τετραγωνική, έχουμε

$$H(\mathbf{h}) = H\left(\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\|\mathbf{h}\|\right) = H\left(\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\right)\|\mathbf{h}\|^2 = g\left(\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\right)\|\mathbf{h}\|^2 \geq M\|\mathbf{h}\|^2$$

για κάθε $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$. (Το αποτέλεσμα ισχύει προφανώς αν $\mathbf{h} = \mathbf{0}$.) ■

Παρατηρήστε ότι η τετραγωνική συνάρτηση που αντιστοιχεί στον συμμετρικό πίνακα $\frac{1}{2}(\partial^2 f/\partial x_i\,\partial x_j)$ είναι η εσσιανή.

[6] Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιούμε, χωρίς απόδειξη, ένα θεώρημα αντίστοιχο με το γνωστό θεώρημα του απειροστικού λογισμού που λέει ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$ έχει μέγιστο και ελάχιστο· βλ. Θεώρημα 7.

Απόδειξη του θεωρήματος 5 Υπενθυμίζουμε ότι αν η $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι κλάσης C^3 και το $\mathbf{x}_0 \in U$ είναι κρίσιμο σημείο, το θεώρημα του Taylor μπορεί να γραφτεί ως

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

όπου $(R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}))/\|\mathbf{h}\|^2 \to 0$ καθώς $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$.

Επειδή η $Hf(\mathbf{x}_0)$ είναι θετικά ορισμένη, το Λήμμα 1 μας εγγυάται ότι υπάρχει μια σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$,

$$Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) \geq M\|\mathbf{h}\|^2.$$

Επειδή $R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})/\|\mathbf{h}\|^2 \to 0$ καθώς $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta$,

$$|R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})| < M\|\mathbf{h}\|^2.$$

Επομένως, $0 < Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)$ για $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta$, άρα το $\mathbf{x}_0$ είναι τοπικό ελάχιστο· μάλιστα, είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο.

Η απόδειξη για την περίπτωση αρνητικά ορισμένης συνάρτησης γίνεται με αντίστοιχο τρόπο ή με εφαρμογή των παραπάνω στην $-f$ (την αφήνουμε ως άσκηση). ■

Παράδειγμα 5 Θεωρήστε ξανά τη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο και η f είναι ήδη στη μορφή του θεωρήματος Taylor:

$$f((0, 0) + (h_1, h_2)) = f(0, 0) + (h_1^2 + h_2^2) + 0.$$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε απευθείας ότι η εσσιανή στο $(0, 0)$ είναι

$$Hf(\mathbf{0})(\mathbf{h}) = h_1^2 + h_2^2,$$

η οποία είναι προφανώς θετικά ορισμένη. Άρα το $(0, 0)$ είναι τοπικό ελάχιστο. Την απλή αυτή περίπτωση μπορούμε ασφαλώς να την αντιμετωπίσουμε χωρίς να καταφύγουμε στον απειροστικό λογισμό. Πράγματι, είναι προφανές ότι $f(x, y) > 0$ για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$. ▲

Για συναρτήσεις δύο μεταβλητών $f(x, y)$, η εσσιανή γράφεται ως εξής:

$$Hf(x, y)(\mathbf{h}) = \tfrac{1}{2}[h_1, h_2] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα χρήσιμο κριτήριο για το πότε μια τετραγωνική συνάρτηση που ορίζεται από έναν τέτοιο πίνακα 2×2 είναι θετικά ορισμένη. Αυτό θα μας φανεί χρήσιμο σε συνδυασμό με το Θεώρημα 5.

Λήμμα 2 Έστω

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad H(\mathbf{h}) = \tfrac{1}{2}[h_1, h_2] B \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

Η $H(\mathbf{h})$ είναι θετικά ορισμένη αν και μόνο αν $a > 0$ και $\det B = ac - b^2 > 0$.